

**CHƯƠNG 4: GIỚI HẠN**

**Câu 1 :**  $\lim \left[ n \left( \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right]$  bằng

- A.  $+\infty$ .                      B.  $\frac{3}{2}$ .                      C. 1,499.                      D. 0.

**Đáp án B.**

$$\lim \left[ n \left( \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right] = \lim \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{2}.$$

**Câu 2 :** Giới hạn của  $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$  bằng

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{3}{2}$                       C.  $-\frac{1}{4}$                       D.  $-\frac{1}{3}$

**Đáp án B**

Ta có  $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\frac{3}{2}$

**Câu 3:** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

- A.  $-\infty$                       B. 0                      C.  $\sqrt{6}$                       D.  $+\infty$

**Đáp án B**

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)(x+3)}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x+3}} = 0$$

**Câu 4 :** Tính giới hạn  $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{2-x}-1}$

- A.  $L = -6$                       B.  $L = -4$                       C.  $L = 2$                       D.  $L = -2$

**Đáp án C**

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2-x}+1 = 2$$

**Câu 5:** Kết quả của giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$  bằng

- A. 0                      B. 4                      C. -4                      D. 2

**Đáp án B**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$

**Câu 6:** Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-3}}$

A.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B.  $-\sqrt{2}$

C.  $\sqrt{2}$

D.  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Đáp án B**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} = -\sqrt{2}$$

**Câu 7:** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+1}$

A. -5

B. 7

C.  $-\frac{2}{3}$

D.  $\frac{1}{3}$

**Đáp án C**

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}-2}{3+\frac{1}{n}} = -\frac{2}{3}$

**Câu 8:** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$ .

A.  $+\infty$ .

B. 0.

C.  $-\infty$ .

D.  $\frac{4}{3}$ .

**Đáp án là ..D..**

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x \left( \sqrt[3]{(1+4x)^2} + \sqrt[3]{1+4x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\left( \sqrt[3]{(1+4x)^2} + \sqrt[3]{1+4x} + 1 \right)} = \frac{4}{3}$$

**Câu 9:** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1}$ .

A. -1.

B.  $-\infty$ .

C. 2.

D.  $+\infty$ .

**Đáp án là ..B..**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty \text{ (Có dạng } \frac{3}{0} \text{)}.$$

**Câu 10:** Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-2n}{3n^2+n-2}$ .

A.  $+\infty$

B.  $-\infty$

C. 0.

D.  $\frac{1}{3}$ .

**Đáp án là ..A..**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3 - 2n}{n^3}}{\frac{3n^2 + n - 2}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = +\infty \text{ (Có dạng } \frac{1}{0^+} \text{)}$$

**Câu 11:** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng  $-\infty$  ?

A.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$       B.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$       C.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2}$       D.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2}$

**Đáp án C**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (-3x+4) = -2 < 0$  và  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \\ x-2 > 0 \forall x \end{cases}$ . Vậy  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2} = -\infty$

**Câu 12:** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 0 ?

A.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3}{1 - 2^n}$       B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-3)^2}{n - 2n^3}$       C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 3^n}$       D.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n}$

**Đáp án C**

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{3^n \left[ 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = 0 \cdot (-1) = 0$

**Câu 13:** Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2}$

A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{3}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D. 0

**Đáp án A**

Vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$

**Câu 14:** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

A. -1      B.  $\frac{2}{3}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{5}{4}$

**Đáp án C**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}$

**Câu 15:** Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A.  $\frac{1}{n}$ ;      B.  $\frac{n+1}{n}$ ;      C.  $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ ;      D.  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ;

**Đáp án C**

**Câu 16:** Tính  $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$  ?

**Đáp án A**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - \sqrt{x+3})(2x + \sqrt{x+3})}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+3}{(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

**Câu 17 :** Tính  $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x)$ ?

**A.**  $I = \frac{1}{2}$ .

**B.**  $I = +\infty$ .

**C.**  $I = 0$ .

**D.**  $I = \frac{3}{4}$ .

**Đáp án D**

**Phương pháp:** Khử dạng vô định:  $\infty - \infty$

- Trục căn thức  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x = \frac{3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x}$

- Chia cả tử và mẫu của  $f(x)$  cho  $x$  rồi cho  $x \rightarrow +\infty$

**Cách giải:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x \sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 3x + 1 - 2x^2}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{3}{\sqrt{4} + 2} = \frac{3}{4}$$

**Câu 18:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

**A.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = +\infty$

**B.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = 1$

**C.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = -\infty$

**D.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = 0$

**Đáp án A**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x} - 2} = +\infty$$

**Câu 19 :** Giá trị của  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$  bằng:

**A.** 0

**B.**  $\frac{1}{2}$

**C.** 1

**D.** -2

**Đáp án A.**

Có  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} = 0.$

**Câu 20:** Trong các dãy số sau, dãy số nào có giới hạn khác 0 ?

A.  $u_n = (0,1234)^n$       B.  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$       C.  $u_n = \frac{\sqrt{4n^3 - n + 1}}{n\sqrt{n+3} + 1}$       D.  $u_n = \frac{\cos 2n}{n}$

**Đáp án C**

**Mẹo nhanh:** trên tử và mẫu của cau C ta loại trừ đi các đa thức bậc thấp hơn đi và để lại đa thức bậc cao nhất.

$$\lim \frac{(\sqrt{4n^3 - n + 1})}{n\sqrt{n+3} + 1} = \lim \frac{(\sqrt{4n^3})}{n\sqrt{n}} = 2.$$

**Câu 21:** Chọn kết quả đúng của  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$

A.  $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$       B.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Đáp án C**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{x\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}+3}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

**Câu 22:** Kết quả giới hạn  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1}$  là:

A. 1      B. -2      C. 2      D. -1

**Đáp án C**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

**Câu 23:** Giá trị của  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$  bằng :

A. 2      B. 1      C.  $+\infty$       D. 3

**Đáp án A**

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$$

**Câu 24:** Tính  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3x-1}{x-1}$ .

A.  $-\infty$ .      B. -3.      C.  $+\infty$ .      D. -1.

**Đáp án C**

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3x-1}{x-1} = \frac{-4}{0^-} = +\infty.$

**Câu 25:** Tìm m  $C = 2$ . Với  $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - mx + m - 1}{x^2 - 1}$  để

- A.  $m = 2$                       B.  $m = -2$                       C.  $m = 1$                       D.  $m = -1$

**Đáp án là B.**

$$\text{Ta có: } C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1) - m(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-m}{x+1} = \frac{2-m}{2}$$

$$\text{mà } C = 2 \Rightarrow m = -2.$$

**Câu 26:** Giá trị của  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)$  bằng

- A. 0                      B. 1                      C.  $+\infty$                       D.  $-\infty$

**Đáp án là C.**

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = +\infty.$$

**Câu 27:**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2017)$  bằng

- A.  $+\infty$ .                      B. 3.                      C. -3.                      D.  $-\infty$ .

**Đáp án D.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2017) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x^3 \left( 3 + \frac{5}{x} - \frac{9\sqrt{2}}{x^2} - \frac{2017}{x^3} \right) \right] = -\infty.$$

**Câu 28:**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $-\infty$                       D.  $+\infty$

**Đáp án là A.**

$$\bullet \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left( 2 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{- \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right)}{\left( 2 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{1}{2}.$$

**Câu 29 :** Tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^2 - 1}{x}$ .

- A. 4                      B. 0                      C. 2                      D. 1

**Đáp án A**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x-1)(1+2x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [2(2x+2)] = 4$$

**Câu 30:** Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 3}{2n^2 + n + 1}$

- A. 0                      B.  $+\infty$                       C. 3                      D.  $\frac{1}{2}$

**Đáp án D**

Ta có  $\lim \frac{n^2 - n + 3}{2n^2 + n + 1} = \lim \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$

**Câu 31:** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1}$

A. 2

B. 3

C.

D. 1

**Đáp án A**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2$

**Câu 32:** Tính giới hạn  $I = \lim \frac{2n+1}{n+1}$

A.  $I = \frac{1}{2}$

B.  $I = +\infty$

C.  $I = 2$

D.  $I = 1$

**Đáp án C**

**Câu 33:**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$  bằng

A. 0

B. -4

C. -3

D. 1

**Đáp án B**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = 4$

**Câu 34:** Cho giới hạn  $I = \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 5 + n}}{4n - \sqrt{n^2 + 1}}$ . Khi đó, giá trị của I là

A.  $I = 1$

B.  $I = \frac{5}{3}$

C.  $I = -1$

D.  $I = \frac{3}{4}$

**Đáp án A**

$I = \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 5 + n}}{4n - \sqrt{n^2 + 1}} = \lim \frac{\sqrt{4 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n}}}{4 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{\sqrt{4} + 1}{4 - \sqrt{1}} = 1$

**Câu 35 :** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - \sqrt{1 - 2x}}{x}$ .

A. 2

B. -1

C. -2

D. 0

**Đáp án D**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - \sqrt{1 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x}}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x}{(\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1 - 2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 2}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1 - 2x} + 1} = -1 + 1 = 0$$

**Câu 36:** Tính giới hạn  $M = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

A.  $M = 0$

B.  $M = -1$

C.  $M = 1$

D.  $M = 3$

**Đáp án D**

Ta có  $M = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x+1} = 3$

**Câu 37:** Trong các mệnh đề được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu  $|q| \leq 1$  thì  $\lim q^n = 0$

B. Nếu  $\lim u_n = a, \lim v_n = b$  thì  $\lim(u_n, v_n) = ab$

C. Với  $k$  là số nguyên dương thì  $\lim \frac{1}{n^k} = 0$

D. Nếu  $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = +\infty$  thì  $\lim(u_n, v_n) = +\infty$

**Đáp án B**

**Câu 38:** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2 + x}}{x + 2}$

A.  $-\infty$

B.  $-2$

C.  $0$

D.  $2$

**Đáp án B**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2 + x}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{2|x|}{x} \right) = -2$$

**Câu 39:** Giá trị của số thực  $m$  sao cho  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 1)(mx + 3)}{x^3 + 4x + 7} = 6$  là

A.  $m = -3$

B.  $m = 3$

C.  $m = 2$

D.  $m = -2$

**Đáp án B**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 1)(mx + 3)}{x^3 + 4x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right) \left(m + \frac{3}{x}\right)}{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = 2m = 6 \Leftrightarrow m = 3$$

**Câu 40:** Khi tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} + 2x}{3 - 4|x|}$  ta được kết quả là một phân số tối giản

$\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Tính  $a + b$ ?

- A.  $a + b = 5$                       B.  $a + b = 7$                       C.  $a + b = -1$                       D.  $a + b = -3$

**Đáp án A**

$$\text{Đặt } x = -t \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^2 + t} - 2t}{3 - 4t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{t}} - 2}{\frac{3}{t} - 4} = \frac{\sqrt{1} - 2}{-4} = \frac{1}{4}$$

**Câu 41:** Cho dãy số  $(a_n)$  với  $a_n = n - \sqrt{n^2 - 1}, n \geq 1$  Tìm phát biểu sai:

- A.  $a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}, n \geq 1$                       B.  $(a_n)$  là dãy số tăng.  
C.  $(a_n)$  bị chặn trên.                      D.  $(a_n)$  chặn dưới.

**Đáp án B**

Xét hàm số  $f(n) = n - \sqrt{n^2 - 1}$  với  $n \geq 1$

$$\Rightarrow f'(n) = 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{\sqrt{n^2 - 1} - n}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2 - 1}} < 0$$

$\Rightarrow f(n)$  nghịch biến trên  $[1; +\infty) \Rightarrow (a_n)$  là dãy số giảm

**Câu 42** Cho  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{x^2 + 1} + 2021}{x + 2022} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + bx + 1} - x) = 1$ . Tính  $P = 4a + b$ .

- A.  $P = -1$                       B.  $P = 2$                       C.  $P = 3$                       D.  $P = 1$

**Đáp án A**

$$\text{Ta có } d(M; Ox) = \left| \frac{a - 3}{a + 3} \right|$$

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + bx + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx + 1}{\sqrt{x^2 + bx + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx + 1}{|x| \sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = b$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{1}{2}; b = 1 \text{ suy ra } P = 4a + b = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1$$

**Câu 43:** Tính  $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1} \right)$ .

- A.  $L = -0,5$                       B.  $L = -\infty$                       C.  $L = 0$                       D.  $L = 0,5$

**Đáp án A**

Ta có:  $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} + x + \sqrt[3]{x^3 + 1} - x \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)} \cdot x + x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)} \cdot x + x^2} \right) = -0,5 + 0 = -0,5$$

**Câu 44:** Giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{3x^2 - 4x - 4} + \frac{1}{x^2 - 12x + 20} \right)$  là một phân số tối giản  $\frac{a}{b}$  ( $b > 0$ ). Khi đó giá trị của  $b - a$  bằng:

A. 15

B. 16

C. 18

D. 17

**Đáp án D**

Ta có  $\frac{1}{3x^2 - 4x - 4} + \frac{1}{x^2 - 12x + 20} = \frac{1}{(x-1)(3x+2)} + \frac{1}{(x-2)(x-10)}$

$$= \frac{x-10+3x+2}{(x-2)(3x+2)(x-10)} = \frac{4(x-2)}{(x-2)(3x+2)(x-10)} = \frac{4}{(3x+2)(x-10)}$$

Do đó  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{3x^2 - 4x - 4} + \frac{1}{x^2 - 12x + 20} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(3x+2)(x-10)} = \frac{-1}{16}$

Vậy theo bài ra thì  $a = -1$ ,  $b = 16$  nên  $b - a = 17$

**Câu 45:** Cho  $f(x)$  là một đa thức thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24$ . Tính  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1 \left( \sqrt{2f(x) + 4} + 6 \right)}$ .

A.  $I = 24$ .B.  $I = +\infty$ .C.  $I = 2$ .D.  $I = 0$ .**Đáp án C.**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24 \Rightarrow \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24 \Leftrightarrow f(x) = 24x - 8 \Rightarrow f(1) = 16$ .

Khi đó  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x-1) \left( \sqrt{2f(x) + 4} + 6 \right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2f(x) + 4} + 6} = 24 \cdot \frac{1}{\sqrt{2f(1) + 4} + 6} = 2$ .

**Câu 46:** Tính giới hạn:  $\lim \left[ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$ ?

A. 0

B. 2

C. 1

D.  $\frac{3}{2}$ **Đáp án C****Giải:**

Ta có:  $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Suy ra:  $\lim \left[ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$

**Câu 47:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x^2+x+2}}{x-1} = ?$

A.  $\frac{1}{12}$

B.  $+\infty$

C.  $\frac{-3}{2}$

D.  $\frac{-2}{3}$

**Đáp án D**

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x^2+x+2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2} + 2} = \frac{1}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{3}$

**Câu 48:** Tính giới hạn :  $\lim \left[ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$

A. 1

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{4}$

D.  $\frac{3}{2}$

**Đáp án B**

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim S_n = \lim \frac{n+1}{2n} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

**Câu 49:** Đặt  $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$ . Xét dãy số  $(u_n)$  sao cho  $u_n = \frac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).f(6)...f(2n)}$ . Tính

$\lim n \sqrt{u_n}$ .

A.  $\lim n \sqrt{u_n} = \sqrt{2}$

B.  $\lim n \sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

C.  $\lim n \sqrt{u_n} = \sqrt{3}$

D.  $\lim n \sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**Đáp án là D.**

Ta có  $f(n) = [(n^2 + 1) + n]^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 2n.(n^2 + 1) + n^2 + 1 = (n^2 + 1)[n^2 + 1 + 2n + 1]$   
 $= (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1]$

$$\text{Do đó: } \frac{f(2n-1)}{f(2n)} = \frac{\left[ \frac{(2n-1)^2+1}{(2n)^2+1} \right] \left[ \frac{(2n)^2+1}{(2n+1)^2+1} \right]}{\left[ \frac{(2n)^2+1}{(2n)^2+1} \right] \left[ \frac{(2n+1)^2+1}{(2n+1)^2+1} \right]} = \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}$$

$$\text{Suy ra } u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)} = \frac{f(1)}{f(2)} \cdot \frac{f(3)}{f(4)} \cdot \frac{f(5)}{f(6)} \dots \frac{f(2n-1)}{f(2n)}$$

$$= \frac{1^2+1}{3^2+1} \cdot \frac{3^2+1}{5^2+1} \cdot \frac{5^2+1}{7^2+1} \dots \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1} = \frac{2}{(2n+1)^2+1} = \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

$$\Rightarrow n\sqrt{u_n} = n \cdot \sqrt{\frac{1}{2n^2+2n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Câu 50 :** Cho  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}\sqrt{x+4}-2} \right) = \frac{a}{b}$  ( $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Tính tổng  $L = a + b$

A.  $L = 53$

B.  $L = 23$

C.  $L = 43$

D.  $L = 13$

**Đáp án C**

Cách 1: Ta có  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}\sqrt{x+4}-2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{x}{\sqrt{x+4} \left( \frac{x+1-1}{\sqrt[3]{(x+1)^6} + \sqrt[3]{(x+1)^5} + \dots + 1} \right) + \frac{x}{\sqrt{x+4}+2}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{4}} = \frac{28}{15}$$

Cách 2: Ta có  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}\sqrt{x+4}-2} \right) = \frac{a}{b}$  (Dùng phím CALC  $x = 0,00001$  ta được

$$I = 1,866666 \sim 1,866666666 = \frac{5,6}{3} = \frac{28}{15} \Rightarrow L = 43)$$

## PHẦN 2. CHƯƠNG V

**Câu 1.** Số gia của hàm số  $y = x^2 + 2$  tại điểm  $x_0 = 2$  ứng với số gia  $\Delta x = 1$  bằng bao nhiêu?

A. 13.

B. 9.

C. 5.

D. 2.

**Hướng dẫn giải:**

Chọn đáp án C

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2+1) - f(2) = 5$$

**Câu 2.** Đạo hàm của hàm số  $y = 2x^3 - (4x^2 - 3)$  bằng biểu thức nào sau đây?

A.  $6x^2 - 8x - 3$ .

B.  $6x^2 - 8x + 3$ .

C.  $2(3x^2 - 4x)$ .

D.  $2(3x^2 - 8x)$ .

**Hướng dẫn giải:**

Chọn đáp án C

$$y' = 6x^2 - 8x = 2(3x^2 - 4x).$$

**Câu 3.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - x^2 - 3x$ . Giá trị  $f'(-1)$  bằng bao nhiêu?

A. -2.

B. -1.

C. 0.

D. 2.

**Hướng dẫn giải:**

Ta có  $f'(x) = (x^3 - x^2 - 3x)' = 3x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 2$ .

**Chọn đáp án D.**

**Câu 4.** Cho hàm số  $g(x) = 9x - \frac{3}{2}x^2$ . Đạo hàm của hàm số  $g(x)$  dương trong trường hợp nào?

- A.  $x < 3$ .                      B.  $x < 6$ .                      C.  $x > 3$ .                      D.  $x < -3$ .

**Hướng dẫn giải:**

Ta có  $g'(x) = \left(9x - \frac{3}{2}x^2\right)' = 9 - 3x \Rightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow 9 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < 3$ .

**Chọn đáp án A.**

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 6$ . Số nghiệm của phương trình  $f'(x) = 4$  là bao nhiêu?

- A. 0.                                      B. 1.  
C. 2.                                      D. Nhiều hơn 2 nghiệm.

**Hướng dẫn giải:**

Ta có  $f'(x) = \left(\frac{4}{5}x^5 - 6\right)' = 4x^4$ . Suy ra  $f'(x) = 4 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ .

**Chọn đáp án C.**

**Câu 6.** Cho hai hàm số  $f(x) = x^2 + 5$ ;  $g(x) = 9x - \frac{3}{2}x^2$ . Giá trị của  $x$  là bao nhiêu để  $f'(x) = g'(x)$ ?

- A. -4.                                      B. 4.                                      C.  $\frac{9}{5}$ .                                      D.  $\frac{5}{9}$ .

**Hướng dẫn giải:**

Ta có  $\begin{cases} f'(x) = 2x \\ g'(x) = 9 - 3x \end{cases} \Rightarrow f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 2x = 9 - 3x \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$ .

**Chọn đáp án C.**

**Câu 7.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ . Để  $f'(x) \leq 0$  thì  $x$  có giá trị thuộc tập hợp nào?

- A.  $\left[-\frac{7}{3}; 1\right]$ .                      B.  $\left[-1; \frac{7}{3}\right]$ .                      C.  $\left(-\frac{7}{3}; 1\right)$ .                      D.  $\left\{-\frac{7}{3}; 1\right\}$ .

**Hướng dẫn giải:**

Ta có  $f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 7x + 3)' = 3x^2 + 4x - 7$ . Suy ra  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 7 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq x \leq 1$

**Chọn đáp án A.**

**Câu 8.** Cho  $f(x) = 5x^2$ ;  $g(x) = 2(8x - x^2)$ . Bất phương trình  $f'(x) > g'(x)$  có nghiệm là?

- A.  $x > \frac{8}{7}$ .                                      B.  $x > \frac{6}{7}$ .                                      C.  $x < \frac{8}{7}$ .                                      D.  $x > -\frac{8}{7}$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án A.**

Ta có:  $f'(x) = 10x$ ;  $g'(x) = 16 - 4x$ . Khi đó  $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 10x > 16 - 4x \Leftrightarrow x > \frac{8}{7}$ .

**Câu 9.** Phương trình tiếp tuyến với đồ thị  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = -1$  là:

- A.  $y = 8x + 3$ .                      B.  $y = 8x + 7$ .                      C.  $y = 8x + 8$ .                      D.  $y = 8x + 11$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án A.**

Tọa độ tiếp điểm:  $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -5$ . Tiếp điểm  $M(-1; -5)$ .

Hệ số góc của tiếp tuyến:  $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y'(-1) = 8$ .

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ  $x_0 = -1$  có phương trình:  $y = 8(x + 1) - 5 \Leftrightarrow y = 8x + 3$ .

**Câu 10.** Tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + 1$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = -1$  có hệ số góc bằng:

A. 7.

B. 5.

C. 1.

D. -1.

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án B.**

Hệ số góc của tiếp tuyến:  $y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow y'(-1) = 5$ .

**Câu 11.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 5$ . Với giá trị nào của  $x$  thì  $f'(x)$  âm?

A.  $-1 < x < \frac{1}{3}$ .

B.  $\frac{1}{3} < x < 1$ .

C.  $-\frac{1}{3} < x < 1$ .

D.  $-\frac{2}{3} < x < 2$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án C.**

Ta có:  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ . Khi đó  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$ .

**Câu 12.** Cho hàm số  $f(x) = mx - \frac{1}{3}x^3$ . Với giá trị nào của  $m$  thì  $x = -1$  là nghiệm của bất phương trình  $f'(x) < 2$ ?

A.  $m > 3$ .

B.  $m < 3$ .

C.  $m = 3$ .

D.  $m < 1$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án B.**

Ta có  $f'(x) = m - x^2$ .

$x = -1$  là nghiệm của bất phương trình  $f'(x) < 2 \Rightarrow f'(-1) < 2 \Leftrightarrow m - 1 < 2 \Leftrightarrow m < 3$ .

**Câu 13.** Đạo hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$  bằng biểu thức nào sau đây?

A.  $\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x}}$ .

B.  $\frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x}}$ .

C.  $\frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}$ .

D.  $-\frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x}}$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án C**

Ta có  $f'(x) = \frac{(x^2 - 5x)'}{2\sqrt{x^2 - 5x}} = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}$

**Câu 14.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \frac{\cos x}{x^2}$

A.  $y' = -\frac{\sin x}{2x}$ .

B.  $y' = \frac{-x \sin x - 2 \cos x}{x^3}$ .

C.  $y' = \frac{-x \sin x + 2 \cos x}{x^3}$ .

D.  $y' = -\frac{2 \sin x}{x^3}$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án B.**

Ta có  $y = \frac{\cos x}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{(\cos x)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot \cos x}{x^4} = \frac{-\sin x \cdot x^2 - 2x \cdot \cos x}{x^4} = \frac{-x \sin x - 2 \cos x}{x^3}$

**Câu 15.** Nếu  $y = \sin \frac{x}{2}$  thì  $y^{(n)} =$

A.  $\frac{1}{2^n} \sin \left( \frac{x}{2} + n \frac{\pi}{2} \right)$ .

B.  $\sin \left( \frac{x}{2} + n \frac{\pi}{2} \right)$ .

C.  $2^n \sin \left( \frac{x}{2} + n \frac{\pi}{2} \right)$ .

D.

$\frac{1}{2^n} \sin \left( \frac{x}{2} + n\pi \right)$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án A.**

Chứng minh bằng quy nạp  $y^{(n)} = \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{n\pi}{2}\right)$  (1)

Với  $n=1$  ta có  $y' = \left(\sin\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

Giả sử (1) đúng với  $n=k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  tức là ta có  $y^{(k)} = \frac{1}{2^k} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)$  (1)

Chứng minh (1) đúng với  $n=k+1$  tức là cần chứng minh  $y^{(k+1)} = \frac{1}{2^{k+1}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$  (2)

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \left(y^{(k)}\right)' = \left(\frac{1}{2^k} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^{k+1}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

**Câu 16.** Phương trình tiếp tuyến của parabol  $y = x^2 + x + 3$  song song với đường thẳng  $y = \frac{4}{3} - x$  là :

- A.  $y = x - 2$ .                      B.  $y = 1 - x$ .                      C.  $y = 2 - x$ .                      D.  $y = 3 - x$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án C.**

Ta có  $y = x^2 + x + 3 \Rightarrow y' = 2x + 1$

Giả sử  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm của tiếp tuyến với parabol  $y = x^2 + x + 3$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng  $y = \frac{4}{3} - x$  nên

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 + 1 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1; y(-1) = 3$$

Phương trình tiếp tuyến là  $y = -1(x+1) + 3$  hay  $y = 2 - x$

**Câu 17.** Đạo hàm của hàm số  $y = (x^5 - 2x^2)^2$  bằng biểu thức nào sau đây?

- A.  $10x^9 + 16x^3$ .    B.  $10x^9 - 14x^6 + 16x^3$ .    C.  $10x^9 - 28x^6 + 16x^3$ .    D.  $10x^9 - 28x^6 + 8x^3$ .

**Hướng dẫn giải:**

Áp dụng công thức  $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ .

$$\text{Ta có: } y' = 2(x^5 - 2x^2)(x^5 - 2x^2)' = 2(x^5 - 2x^2)(5x^4 - 4x) = 10x^9 - 28x^4 + 16x^3.$$

**Chọn đáp án C.**

**Câu 18.** Đạo hàm của hàm số  $y = \left(\frac{2-3x}{2x+1}\right)^2$  bằng biểu thức nào sau đây?

- A.  $\frac{-14}{(2x+1)^2} \cdot \frac{2-3x}{2x+1}$ .    B.  $\frac{-4}{(2x+1)^2} \cdot \frac{2-3x}{2x+1}$ .    C.  $\frac{16}{(2x+1)^2} \cdot \frac{2-3x}{2x+1}$ .    D.  $2\left(\frac{2-3x}{2x+1}\right)$ .

**Hướng dẫn giải:**

Áp dụng công thức  $(u^n)' = nu^{n-1}u'$  và  $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ .

$$\text{Ta có: } y' = 2\left(\frac{2-3x}{2x+1}\right) \cdot \left(\frac{2-3x}{2x+1}\right)' = 2\left(\frac{2-3x}{2x+1}\right) \cdot \frac{-14}{(2x+1)^2}.$$

**Chọn đáp án A.**

**Câu 19.** Đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 12}$  bằng biểu thức nào sau đây?

A.  $\frac{1}{2\sqrt{3x^2-2x+12}}$ .      B.  $\frac{4x}{2\sqrt{3x^2-2x+12}}$ .      C.  $\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+12}}$ .      D.

$\frac{1}{2\sqrt{3x^2-2x+12}}$ .

**Hướng dẫn giải:**

Áp dụng công thức  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

Ta có:  $y' = \frac{(3x^2-2x+12)'}{2\sqrt{3x^2-2x+12}} = \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+12}}$ .

**Chọn đáp án C.**

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = \sqrt{2x+2}$ . Biểu thức  $y(1) + y'(1)$  có giá trị là bao nhiêu?

A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $\frac{3}{2}$ .      C.  $\frac{9}{4}$ .      D.  $\frac{5}{2}$ .

**Hướng dẫn giải:**

Áp dụng công thức  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

Ta có:  $y' = \frac{(2x+2)'}{2\sqrt{2x+2}} = \frac{x}{\sqrt{2x+2}}$ .

$y(1) + y'(1) = \sqrt{2 \cdot 1 + 2} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 + 2}} = \frac{5}{2}$ .

**Chọn đáp án D.**

**Câu 21.** Đạo hàm số của hàm số  $y = 2\sin 2x + \cos 2x$  bằng biểu thức nào sau đây?

A.  $4\cos 2x - 2\sin 2x$ .      B.  $4\cos 2x + 2\sin 2x$ .  
C.  $2\cos 2x - 2\sin 2x$ .      D.  $-4\cos 2x - 2\sin 2x$ .

**Hướng dẫn giải:**

Ta có:  $(2\sin 2x + \cos 2x)' = 2(\sin 2x)' + (\cos 2x)' = 4\cos 2x - 2\sin 2x$

**Chọn đáp án A.**

**Câu 22.** Đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt{\sin 5x}$  bằng biểu thức nào sau đây?

A.  $\frac{-5\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}$ .      B.  $\frac{5\cos 5x}{\sqrt{\sin 5x}}$ .      C.  $\frac{\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}$ .      D.  $\frac{5\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}$ .

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn D.**

Ta có:  $y' = \frac{(\sin 5x)'}{2\sqrt{\sin 5x}} = \frac{(5x)' \cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}} = \frac{5\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}$ .

**Câu 23.** Cho  $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ . Biểu thức  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$  có giá trị là bao nhiêu?

A. -2.      B. 0.      C. 1.      D. 2.

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án A.**

Ta có:  $f'(x) = 2\cos x(\cos x)' - 2\sin x(\sin x)'$   
 $= -2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x = -4\sin x \cos x = -2\sin 2x$ .

$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = -2\sin \frac{\pi}{2} = -2$ .

**Câu 24.** Cho  $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$  và  $g(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ . Tổng  $f'(x) + g'(x)$  bằng biểu thức nào sau đây?

A.  $6(\sin^5 x + \cos^5 x + \sin x \cdot \cos x)$ .      B.  $6(\sin^5 x - \cos^5 x - \sin x \cdot \cos x)$ .  
C. 6.      D. 0.

**Hướng dẫn giải:**

Ta có:

$$f'(x) = 6\sin^5 x \cdot \cos x + 6\cos^5 x \cdot (-\sin x) = 6\sin^5 x \cdot \cos x - 6\cos^5 x \cdot \sin x$$

$$g'(x) = \left(\frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x\right)' = \frac{3}{2} \sin 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x$$

Suy ra:

$$f'(x) + g'(x) = 6 \cdot \sin x \cdot \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) (\sin^2 x + \cos^2 x) + 6 \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow -6 \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) + 6 \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

**Chọn đáp án D**

**Câu 25.** Cho  $f$  là hàm số liên tục tại  $x_0$ . Đạo hàm của  $f$  tại  $x_0$  là:

A.  $f(x_0)$ .

B.  $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ .

C.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  (nếu tồn tại giới hạn).

D.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$  (nếu tồn tại giới hạn).

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn đáp án C** theo định nghĩa

**Câu 26.** Cho hàm số  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$  bởi  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ . Giá trị  $f'(0)$  bằng:

A. 0.

B. 1.

C.  $\frac{1}{2}$ .

D. Không tồn tại.

**Hướng dẫn giải:**

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Cho  $x \rightarrow 0$  ta được  $f'(0) = \frac{1}{2}$  nên chọn C.

**Câu 27.** Cho hàm số  $f$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  bởi  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ . Giá trị  $f'(1)$  bằng:

A.  $\frac{3}{2}$ .

B. 1.

C. 0.

D. Không tồn tại.

**Hướng dẫn giải:**

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)} = \frac{x(x-3)}{(x-1)(x-2)}$$

Cho  $x \rightarrow 1$  ta được  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$  không tồn tại nên chọn D.

**Câu 28.** Cho hai kết quả:

(I)  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$ ;

(II)  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6}$

Hãy chọn câu đúng:

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

**Hướng dẫn giải:**

Sử dụng công thức  $\frac{1}{x^n} = -\frac{1}{nx^{n+1}}$  ta được đáp án **A**.

**Câu 29.** Cho hàm  $f$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  bởi  $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x-1}$ . Xét hai câu sau:

(I)  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$       (II)  $f'(x) > 0, \forall x \neq 1$

Hãy chọn câu đúng:

- A.** Chỉ (I) đúng.      **B.** Chỉ (II) đúng.      **C.** Cả hai đều đúng.      **D.** Cả hai đều sai.

**Hướng dẫn giải:**

Ta có:  $f'(x) = 1 + \frac{2}{(x-1)^2} > 0 \quad \forall x \neq 1$  ta được đáp án **B**.

**Câu 30.** Gọi  $(P)$  là đồ thị hàm số  $y = 2x^2 - x + 3$ . Phương trình tiếp tuyến với  $(P)$  tại giao điểm của  $(P)$  với trục tung là:

- A.**  $y = -x + 3$ .      **B.**  $y = -x - 3$ .      **C.**  $y = 4x - 1$ .      **D.**  $y = 11x + 3$ .

**Hướng dẫn giải:**

Ta có:  $y' = 4x - 1$ , giao điểm của  $(P)$  và  $Oy$  là  $M(0; 3)$ ,  $y'(0) = -1$ .

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:  $y - 3 = -x \Leftrightarrow y = -x + 3$  nên ta được đáp án **A**.

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$  có đồ thị  $(H)$ . Đường thẳng  $\Delta$  song song với đường thẳng  $d: y = 2x - 1$  và tiếp xúc với  $(H)$  thì tọa độ tiếp điểm là:

- A.**  $M_0(3; 2)$ .      **B.**  $M_0(3; 2)$  và  $M_1(1; 2)$ .  
**C.**  $M_0(2; 3)$ .      **D.** Không tồn tại.

**Hướng dẫn giải:**

Ta có:  $y' = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2}$ .

Đường thẳng  $\Delta$  song song với đường thẳng  $d: y = 2x - 1$  suy ra  $\Delta: y = 2x + b \quad (b \neq -1)$

$$\Delta \text{ tiếp xúc với } (H) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2} \\ 2x + b = \frac{x^2 - 2x - 1}{x-2} \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Từ phương trình đầu ta suy ra được  $x = 3 \vee x = 1$  thế vào  $(H)$

Ta được đáp án **B**.

**Câu 32.** Nếu  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$  thì  $f''(x)$  là biểu thức nào sau đây?

- A.**  $\frac{x+1}{(x^2 + 2x + 3)\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$ .      **B.**  $\frac{2}{(x^2 + 2x + 3)\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$ .  
**C.**  $\frac{-2}{(x^2 + 2x + 3)\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$ .      **D.**  $\frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)}$ .

**Hướng dẫn giải:**

Ta có:  $f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 3)'}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$ .

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(x+1)' \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x+1) \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 3})'}{(x^2 + 2x + 3)}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+3} - \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+3}}}{x^2+2x+3} = \frac{2}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

**Chọn đáp án B.**

**Câu 33.** Nếu  $f(x) = \frac{2-x}{3x+1}$  thì  $f''(x)$  là biểu thức nào sau đây?

- A.  $\frac{42}{(3x+1)^2}$ .      B.  $\frac{2x-1}{(3x+1)^3}$ .      C.  $\frac{42}{(3x+1)^3}$ .      D.  $-\frac{42}{(3x+1)^3}$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$\text{Ta có: } f'(x) = -\frac{7}{(3x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = 7 \cdot \frac{2(3x+1) \cdot (3x+1)'}{(3x+1)^4} = \frac{42}{(3x+1)^3}.$$

**Chọn đáp án C.**

**Câu 34.** Nếu  $f(x) = (5x+1)(1-x)^3$  thì  $f''(x)$  bằng:

- A.  $-15(1-x)^2$ .      B.  $2(1-10x)(1-x)^2$ .      C.  $5(6x+1)(1-x)^2$ .      D.  $(5x-2)(1-x)^2$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(1-x)^3 - 3(5x+1)(1-x)^2 \\ &= (1-x)^2(5-5x-15x-3) = 2(1-10x)(1-x)^2 \end{aligned}$$

**Chọn đáp án B**

**Câu 35.** Nếu  $y = \sin \frac{x}{2}$  thì  $y^{(n)}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{x}{2} + n \frac{\pi}{2}\right)$ .      B.  $\sin\left(\frac{x}{2} + n \frac{\pi}{2}\right)$ .  
C.  $2^n \sin\left(\frac{x}{2} + n \frac{\pi}{2}\right)$ .      D.  $\frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{x}{2} + n\pi\right)$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right). \\ y'' &= \frac{1}{2^2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^2} \sin\left(\frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right). \\ y''' &= \frac{1}{2^3} \cos\left(\frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^3} \sin\left(\frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right). \\ &\dots \\ y^{(n)} &= \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{x}{2} + n\pi\right). \end{aligned}$$

**Chọn đáp án D**

**Câu 36.** Để tính đạo hàm của  $y = f(x) = \cos\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$ , một học sinh lập luận theo 4 bước sau:

- A. Xét  $u: x \mapsto u(x) = x^2 - \frac{\pi}{4}$ ;  $v: u \mapsto v(u) = \cos u$ .  
B. Hàm số  $y = f(x) = \cos\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$  là hàm hợp của hai hàm  $u$  và  $v$  (theo thứ tự đó).  
C. Áp dụng công thức  $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$ .

D.  $f(x) = \sin u \cdot 2x = 2x \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$ .

Hỏi nếu sai thì sai tại bước nào?

**Hướng dẫn giải:**

Sai bước  $f(x) = \sin u \cdot 2x = 2x \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$ , vì  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

Chọn D

**Câu 37.** Cho hàm số  $y = \cos 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$ . Xét hai kết quả sau:

(I)  $y' = -2 \sin 2x \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x \cos 2x$

(II)  $y' = 2 \sin 2x \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos 2x$

Hãy chọn kết quả đúng

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

**Hướng dẫn giải:**

Ta có  $\left(\cos 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}\right)' = -2 \sin 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2x = -2 \sin 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos 2x$

Chọn B

**Câu 38.** Cho hàm số  $y = f(x) = \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$ . Giá trị  $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$  bằng:

A. 0.

B.  $\sqrt{2}$ .

C.  $\frac{\pi}{2}$ .

D.  $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$f'(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x})$$

$$f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Chọn A

**Câu 39.** Cho hàm số  $y = f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ . Lấy đạo hàm cấp 1, 2, 3,.. Hỏi đạo hàm đến cấp nào thì ta được kết quả triệt tiêu?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

**Hướng dẫn giải:**

$f(x)$  là đa thức bậc 4  $\Rightarrow$  đạo hàm đến cấp 4 sẽ "hết"  $x \Rightarrow$  đạo hàm cấp 5 kết quả bằng 0

Chọn C

**Câu 40.** Cho hàm số  $y = f(x) = -\frac{1}{x}$ . Xét hai mệnh đề:

(I)  $y'' = \frac{2}{x^3}$ ;

(II)  $y''' = -\frac{6}{x^4}$

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

**Hướng dẫn giải:**

$$y' = \frac{1}{x^2}, y'' = -\frac{2}{x^3}, y''' = \frac{6}{x^4}$$

Chọn D

**Câu 41.** Xét hàm số  $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ . Phương trình  $f^{(4)}(x) = -8$  có nghiệm  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  là

A.  $x = \frac{\pi}{2}$

B.  $x = 0, x = \frac{\pi}{6}$ .

C.  $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$ .

D.  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$f'(x) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \quad f''(x) = -4 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \quad f'''(x) = 8 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$f^{(4)}(x) = 16 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{PT } f^{(4)}(x) = -8 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

Mà  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  nên chỉ có giá trị  $x = \frac{\pi}{2}$  thoả mãn

**Chọn A**

**Câu 42.** Cho hàm số  $y = \sin 2x$ . Hãy chọn câu đúng

A.  $4y - y'' = 0$ .

B.  $4y + y'' = 0$ .

C.  $y = y' \tan 2x$ .

D.  $y^2 + (y')^2 = 4$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$y' = 2 \cos 2x, \quad y'' = -4 \sin 2x$$

Xét  $4y - y'' = 4 \sin 2x + 4 \sin 2x \Rightarrow$  loại đáp án  $4y - y'' = 0$

Xét  $4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0 \Rightarrow$  **Chọn đáp án  $4y + y'' = 0$**

Xét  $y' \tan 2x = 2 \cos 2x \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x \neq y \Rightarrow$  loại đáp án  $y = y' \tan 2x$

Xét  $y^2 + (y')^2 = \sin^2 2x + 4 \cos^2 2x \neq 4 \Rightarrow$  loại đáp án  $y^2 + (y')^2 = 4$

**Chọn đáp án B**

**Câu 43.** Cho hàm số  $y = f(x) = (x-1)^2$ . Biểu thức nào sau đây là vi phân của hàm số  $f$ ?

A.  $dy = 2(x-1)dx$ .

B.  $dy = (x-1)^2 dx$ .

C.  $dy = 2(x-1)$ .

D.  $dy = (x-1)dx$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$dy = 2(x-1)dx$$

**Chọn đáp án A**

**Câu 44.** Xét hàm số  $y = f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$ . Chọn câu đúng:

A.  $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$ .

B.  $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$ .

C.  $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$ .

D.  $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$y' = \frac{(1 + \cos^2 2x)'}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} = \frac{-2 \cdot 2 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}}$$

**Chọn đáp án B**

**Câu 45.** Cho hàm số  $y = f(x) - \cos^2 x$  với  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Nếu  $y' = 1$  và

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  thì  $f(x)$  là

A.  $x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\pi}{4}$ .

B.  $x - \frac{1}{2} \cos 2x$ .

C.  $x - \sin 2x$ .

D.  $x + \sin 2x$ .

**Hướng dẫn giải:**

Xét  $y' = f'(x) + \sin 2x$

Nếu  $y' = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \sin 2x$

Do đó  $f(x) = x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$

Mà  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{4}$ . Vậy  $f(x) = x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\pi}{4}$

**Chọn đáp án A**

**Câu 46.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và  $f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \geq 0) \\ \sin(-x) & (x < 0) \end{cases}$ . Tìm khẳng định **sai**

A. Hàm số  $f$  không liên tục tại  $x_0 = 0$ .

B. Hàm số  $f$  không có đạo hàm tại  $x_0 = 0$ .

C.  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ .

D.  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**Hướng dẫn giải:**

Ta có  $f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \geq 0) \\ -\sin x & (x < 0) \end{cases}$

\*  $f(x)$  liên tục tại  $x_0 = 0 \Rightarrow$  “Hàm số  $f$  không liên tục tại  $x_0 = 0$ ”: là đúng

\*  $f(x)$  không tồn tại đạo hàm tại điểm  $x_0 = 0 \Rightarrow$  “Hàm số  $f$  không có đạo hàm tại  $x_0 = 0$ ”: là đúng

\*  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$  “ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ” là sai

\*  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$  “ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ” là đúng

**Chọn đáp án C**

**Câu 47.** Cho hàm số  $f$  xác định trên  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  bởi  $y = f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 1}$ . Xét hai mệnh đề:

(I)  $y' = f'(x) = -1 - \frac{2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

(II)  $y'' = f'' = \frac{4}{(x-1)^3} > 0, \forall x \neq 1$

Chọn mệnh đề đúng:

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả hai đều sai.

D. Cả hai đều đúng.

**Hướng dẫn giải:**

$y = f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 1} = -x + \frac{2}{x - 1}$

$\Rightarrow y' = f'(x) = -1 - \frac{2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1 \Rightarrow$  (I) True

$\Rightarrow y'' = f'' = \frac{4}{(x-1)^3} > 0, \forall x > 1 \Rightarrow$  (II) False

**Chọn đáp án A**

**Câu 48.** Cho hàm số  $f(x) = x^2$  có đồ thị (P) và hàm số  $g(x) = x^3$  có đồ thị (C). Xét hai câu sau:

(I) Những điểm khác nhau  $M \in (P)$  và  $N \in (C)$  sao cho tại những điểm đó, tiếp tuyến song song với nhau là những điểm có tọa độ  $M\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right) \in (P)$  và  $N\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{27}\right) \in (C)$ .

(II)  $g'(x) = 3f(x)$

Chọn câu đúng.

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

**Hướng dẫn giải:**

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow$  (I) True

$$g'(x) = 3x^2 = 3f(x) \Rightarrow \text{(II) True}$$

**Chọn đáp án C**

**Câu 49.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ . Để tính  $f'(x)$ , ta lập luận theo hai cách:

$$\text{(I) } f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

$$\text{(II) } f(x) = \frac{\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Cách nào đúng?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

**Hướng dẫn giải:**

• Kiểm tra mệnh đề (I): Biến đổi  $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ . Áp dụng công

thức  $(\tan u)' = u' \tan u$ , ta có

$$f'(x) = \left(\frac{\pi}{4} - x\right)' \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

Do đó (I) sai.

• Kiểm tra mệnh đề (II): Biến đổi  $f(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ . Áp dụng công thức đạo hàm

$$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}, \text{ ta có } f'(x) = -\frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}. \text{ Do đó, (II) sai}$$

**Chọn đáp án D**

**Câu 50.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$  theo 4 bước sau đây.

Biết rằng cách tính cho kết quả sai, hỏi cách tính sai ở bước nào?

A.  $y = f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$ .

B.  $f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3$ .

C.  $f(x) = 1^3 = 1$ .

D.  $f'(x) = 1$ .

**Hướng dẫn giải:**

Kiểm tra từng bước, ta có

• Bước A đúng vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  nên  $3\sin^2 x \cos^2 x = 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$

• Áp dụng hằng đẳng thức  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$  nên bước B đúng.

• Lại áp dụng  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  nên bước C đúng.

• Sử dụng sai công thức đạo hàm lẽ ra  $(c)' = 0$  nên D sai.

**Chọn đáp án D**

### PHẦN 3 : TỰ LUẬN

**Câu 1:** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Hãy xác định các số  $a, b, c$  biết rằng

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$  và đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  đi qua các điểm  $(-1; -3)$  và  $(1; -1)$ .

**Câu 2:** a) Giả sử hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = f(x+1)$  đều liên tục trên đoạn  $[0; 2]$  và  $f(0) = f(2)$ . Chứng minh phương trình  $f(x) - f(x+1) = 0$  luôn có nghiệm thuộc đoạn  $[0; 1]$ .

b): Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + m$  (1). Tìm  $m$  để tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục  $Ox, Oy$  lần lượt tại các điểm  $A$  và  $B$  sao cho diện tích tam giác  $OAB$  bằng  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 3:** Tìm hai điểm  $A, B$  thuộc đồ thị (C) của hàm số:  $y = x^3 - 3x + 2$  sao cho tiếp tuyến của (C) tại  $A$  và  $B$  song song với nhau và độ dài đoạn  $AB = 4\sqrt{2}$ .

#### HD Giải

**Câu 1:** Ta có  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$+ f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3} + \frac{2a}{3} + b \Leftrightarrow 2a + 3b = -1 \quad (1)$$

$y = f(x)$  đi qua các điểm  $(-1; -3)$  và  $(1; -1)$ .

$$-3 = -1 + a - b + c \Leftrightarrow a - b + c = -2 \quad (2)$$

$$-1 = 1 + a + b + c \Leftrightarrow a + b + c = -2 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có  $a = -1/2; b = 0; c = -3/2$ .

#### Câu 2:

Đặt  $g(x) = f(x) - f(x+1)$

$$g(0) = f(0) - f(1)$$

$$g(1) = f(1) - f(2) = f(1) - f(0)$$

$$\Rightarrow g(0).g(1) = - (f(1) - f(0))^2 \leq 0$$

$f(x)$  liên tục trên  $[0; 2] \Rightarrow g(x)$  liên tục trên  $[0; 1]$

$\Rightarrow g(x)$  luôn có nghiệm thuộc  $[0; 1]$

**Câu 2b.** Với  $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = m - 2 \Rightarrow M(1; m - 2)$

- Tiếp tuyến tại  $M$  là  $d: y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + m - 2$

$$\Rightarrow d: y = -3x + m + 2.$$

-  $d$  cắt trục  $Ox$  tại  $A: 0 = -3x_A + m + 2 \Leftrightarrow x_A = \frac{m+2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{m+2}{3}; 0\right)$

-  $d$  cắt trục  $Oy$  tại  $B: y_B = m + 2 \Rightarrow B(0; m + 2)$

$$- S_{OAB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |OA| |OB| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |OA| |OB| = 3 \Leftrightarrow \left|\frac{m+2}{3}\right| |m+2| = 3 \Leftrightarrow (m+2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 = 3 \\ m+2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$$

Vậy  $m = 1$  và  $m = -5$

#### Câu 3:

Gọi  $A(a; a^3 - 3a + 2)$ ,  $B(b; b^3 - 3b + 2)$ ,  $a \neq b$  là hai điểm phân biệt trên (C).

Ta có:  $y' = 3x^2 - 3$  nên các tiếp tuyến với (C) tại A và B có hệ số góc lần lượt là:

$$y'(a) = 3a^2 - 3 \text{ và } y'(b) = 3b^2 - 3.$$

Tiếp tuyến tại A và B song song với nhau khi:

$$y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow 3a^2 - 3 = 3b^2 - 3 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow a = -b \text{ (vì } a \neq b \Leftrightarrow a-b \neq 0)$$

$$AB = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 32 \Leftrightarrow (a-b)^2 + [(a^3 - 3a + 2) - (b^3 - 3b + 2)]^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + [(a^3 - b^3) - 3(a-b)]^2 = 32 \Leftrightarrow (a-b)^2 + [(a-b)(a^2 + ab + b^2) - 3(a-b)]^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-b)^2 [(a^2 + ab + b^2) - 3]^2 = 32, \text{ thay } a = -b \text{ ta được:}$$

$$4b^2 + 4b^2 (b^2 - 3)^2 = 32 \Leftrightarrow b^2 + b^2 (b^2 - 3)^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow b^6 - 6b^4 + 10b^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - 4)(b^4 - 2b^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow a = -2 \\ b = -2 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

- Với  $a = -2$  và  $b = 2 \Rightarrow A(-2; 0)$ ,  $B(2; 4)$

- Với  $a = 2$  và  $b = -2 \Rightarrow A(2; 4)$ ,  $B(-2; 0)$

Tóm lại cặp điểm A, B cần tìm có tọa độ là:  $(-2; 0)$  và  $(2; 4)$