GV: Đặng Thanh Hải **Trường THPT Triệu Quang Phục**

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KỲ II –NĂM HỌC 2021-2022
TOÁN 12 – GIẢI TÍCH

CHƯƠNG III: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

BÀI 1: NGUYÊN HÀM VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1.Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên *K (K* là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F\left(x\right)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên *K* nếu $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ với mọi $x\in K$.

2.Định lí

Giả sử hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $F\left(x\right)$ trên *K*. Khi đó:

Với mỗi hằng số C, hàm số $F\left(x\right)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên *K*.

Ngược lại, với mỗi nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên *K* thì tồn tại một hằng số C sao cho $G\left(x\right)=F\left(x\right)+C$ với mọi $x\in K$. Do đó $F\left(x\right)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K.

Ký hiệu $\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C$

3.Tính chất

Nếu $f\left(x\right),g\left(x\right)$ là hai hàm số liên tục trên K thì:

a) $\int f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)+C$

b) $\int kf\left(x\right)dx=k\int f\left(x\right)dx$, với *k* là hai số thực khác 0.

c) $\int\left[mf\left(x\right)+ng\left(x\right)\right]dx=m\int f\left(x\right)dx+n\int g\left(x\right)dx$ với *m*,*n* là hai số thực khác 0.

d) Với $a,b\in\mathbb{R}$ và $a\neq 0$ ta có: $\int f\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C$, ở đó $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$.

4.Sự tồn tại nguyên hàm

Định lí: Mọi hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên *K* đều có nguyên hàm trên *K*.

5. BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp $\left(u=u\left(x\right)\right)$	Nguyên hàm của hàm số hợp $\left(u=ax+b; a\neq 0\right)$

$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	$\int d(ax+b) = ax + b + C$
$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$	$u = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln\lvert u\rvert + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	$\int \sqrt{u} du = \frac{2}{3}u\sqrt{u} + C$	$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a}.\frac{2}{3}(ax+b)\sqrt{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{2}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m}.\frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \tan u du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$
$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \cot u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sin u} du = \ln\left\lvert\tan\frac{u}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}\right\rvert + C$

$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$	$\int \frac{1}{\cos u}du = \ln\left\|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$	$\int \frac{1}{\cos(ax+b)}dx$ $=\frac{1}{a}\ln\left\|\tan\left(\frac{ax+b}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$

BÀI 2: TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, với $a<b$.

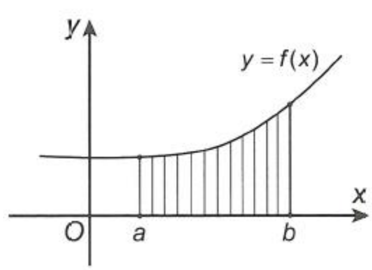
Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì giá trị $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Kí hiệu $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$ (1)

Công thức (1) còn được gọi là công thức Newton – Leibnitz; *a* và *b* được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân.

Ý nghĩa hình học của tích phân

Giả sử hàm số $y=f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, trục hoành *Ox* và hai đường thẳng $x=a, x=b,$ với $a<b$.



$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$

2. Tính chất cơ bản của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên khoảng *K*, trong đó *K* có thể là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và $a,b,c\in K,$ khi đó:

a. Nếu $b=a$ thì $\boxed{\int\limits_a^a f\left(x\right)dx=0}$

b. Nếu $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì ta có:

$$\boxed{\int\limits_a^b f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)\Big|_a^b=f\left(b\right)-f\left(a\right)}$$

c. Tính chất tuyến tính

$$\boxed{\int\limits_a^b\left[k.f\left(x\right)+h.g\left(x\right)\right]dx=k\int\limits_a^b f\left(x\right)dx+h.\int\limits_a^b g\left(x\right)dx}$$

Với mọi $k,h\in\mathbb{R}$.

d. Tính chất trung cận

$$\boxed{\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^c f\left(x\right)dx+\int\limits_c^b f\left(x\right)dx}\text{, với } c\in\left(a;b\right)$$

e. Đảo cận tích phân

$$\boxed{\int\limits_b^a f\left(x\right)dx=-\int\limits_a^b f\left(x\right)dx}$$

f. Nếu $f\left(x\right)\ge 0,\ \forall x\in\left[a;b\right]$ thì $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\ge 0$ và $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=0$ khi $f\left(x\right)=0$.

g. Nếu $f\left(x\right)\ge g\left(x\right),\forall x\in\left[a;b\right]$ thì

$$\boxed{\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\ge\int\limits_a^b g\left(x\right)dx}$$

h. Nếu $m=\min\limits_{\left[a;b\right]}f\left(x\right)$ và $M=\max\limits_{\left[a;b\right]}f\left(x\right)$ thì

$$\boxed{m\left(b-a\right)\le\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\le M\left(b-a\right)}$$

i. Tích phân không phụ thuộc vào biến, tức là ta luôn có

$$\boxed{\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^b f\left(t\right)dt=\int\limits_a^b f\left(u\right)du=\int\limits_a^b f\left(y\right)dy=...}$$

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính tích phân $I=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f\left(x\right)=g\left(u\left(x\right)\right)u'\left(x\right)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số.

Phương pháp:

+ Đặt $u=u\left(x\right)$, suy ra $du=u'\left(x\right)dx$.

+ Đổi cận:

x	a	b
u	$u\left(a\right)$	$u\left(b\right)$

+ Khi đó $\boxed{I=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} g\left(u\right)du=G\left(u\right)\Big|_{u(a)}^{u(b)}}$, với $G\left(u\right)$ là nguyên hàm của $g\left(u\right)$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Bài toán: Tính tích phân $\boxed{I=\int\limits_a^b u\left(x\right).v'\left(x\right)dx}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u=u\left(x\right) \\ dv=v'\left(x\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=u'\left(x\right)dx \\ v=v\left(x\right) \end{cases}$

Khi đó $\boxed{I=\left(u.v\right)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v.du}$ (công thức tích phân từng phần)

BÀI 3: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

I. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (với $a<b$) được xác định theo công thức:

$$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$$

Chú ý

Nếu $f\left(x\right)$ không đổi dấu trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì

$$\boxed{S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|}$$

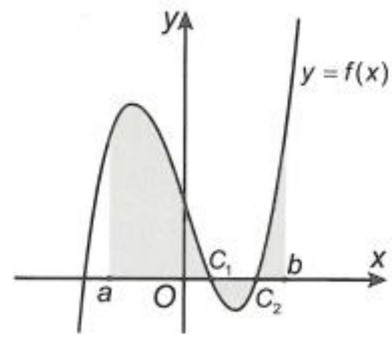
• Nếu phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất $x=c$ thuộc khoảng $\left(a;b\right)$ thì

$$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_a^c\left|f\left(x\right)\right|dx+\int_c^b\left|f\left(x\right)\right|dx$$

$$=\left|\int_a^c f\left(x\right)dx\right|+\left|\int_c^b f\left(x\right)dx\right|$$

• Nếu phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm $c_1<c_2$ thuộc khoảng $\left(a;b\right)$ thì

$$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=\left|\int_c^{c_1} f\left(x\right)dx\right|+\left|\int_{c_1}^{c_2} f\left(x\right)dx\right|+\left|\int_{c_2}^{b} f\left(x\right)dx\right|$$



Phần tô màu đen chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (với $a<b$).

Đặc biệt:

- *Nếu* $f\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left[a;b\right]$ *thì*

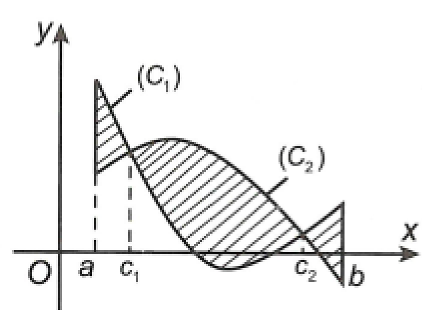
$$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

- *Nếu* $f\left(x\right)\le 0,\ \forall x\in\left[a;b\right]$ *thì*

$$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=-\int_a^b f\left(x\right)dx$$

Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $\left(C_1\right)$: $y=f\left(x\right)$, $\left(C_2\right)$: $y=g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (với $a<b$) được xác định theo công thức:



$$S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

Phần gạch chéo trong hình là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $(C_1):\ y=f(x);(C_2):\ y=g(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a;b]$ *và hai đường thẳng* $x=a$, $x=b$ (với $a<b$).

Đặc biệt:

° Nếu $f(x)\geq g(x),\ \forall x\in[a;b]$ (đồ thị (C_1) nằm phía trên đồ thị (C_2)) thì ta có: $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$

$$=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

• Nếu $f(x)\leq g(x),\ \forall x\in[a;b]$ (đồ thị (C_1) nằm phía dưới đồ thị (C_2)) thì ta có: $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$

$$=-\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

Chú ý

• Nếu phương trình $f(x)=g(x)$ vô nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx=\left|\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|$.

• Nếu phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm duy nhất $x=c$ thuộc $(a;b)$ thì $S=\int_a^c\left|f(x)-g(x)\right|dx+\int_c^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$

$$=\left|\int_a^c\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|+\left|\int_c^b\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|$$

• Nếu phương trình $f(x)=g(x)$ có hai nghiệm $c_1<c_2$ thuộc khoảng $(a;b)$ thì

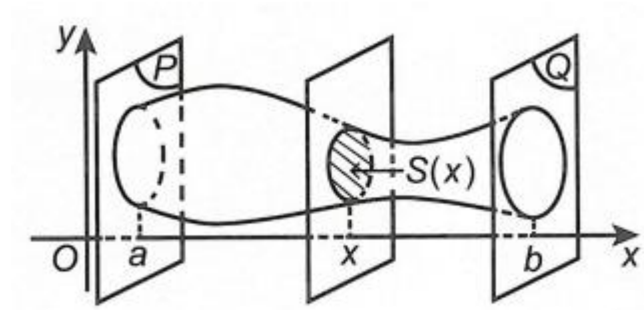
$$S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx=\left|\int_c^{c_1}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|$$

$$+\left|\int_{c_1}^{c_2}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|+\left|\int_{c_2}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|$$

II. THỂ TÍCH VẬT THỂ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

Thể tích vật thể

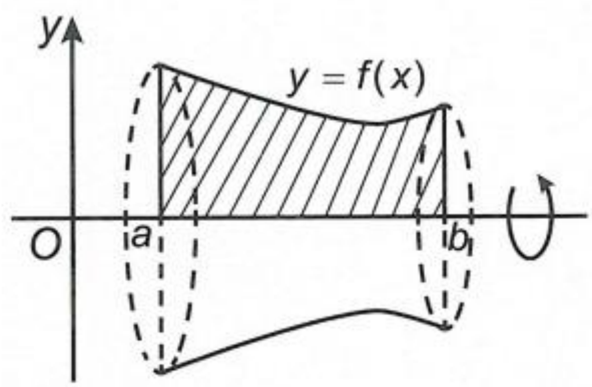
Cắt một vật thể B bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục *Ox* lần lượt tại $x = a$ và $x = b$, với $a < b$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với *Ox* tại điểm có hoành độ *x* (với $a \le x \le b$) cắt *B* theo thiết diện có diện tích $S(x)$ như hình vẽ bên.



Khi đó thể tích vật thể *B* là $V = \int_a^b S(x)dx$.

Thể tích khối tròn xoay

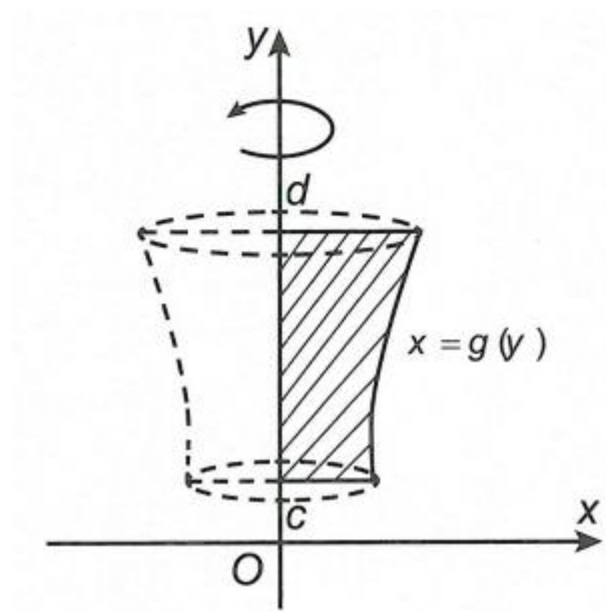
a) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục *Ox* và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ (với $a < b$). Quay (H) xung quanh trục *Ox* ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên.



Thể tích khối tròn xoay thu được là $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$

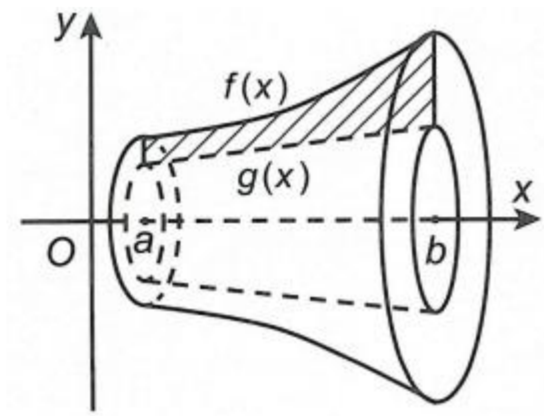
Nếu đổi vai trò của *x* và *y* cho nhau, ta được $V_{Oy} = \pi\int_c^d g^2(y)dy$

Khi đó, hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$ liên tục trên đoạn $[c;d]$, trục *Oy* và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ (với $c < d$). Quay (H) xung quanh trục *Oy* ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên.



b) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số (C_1): $y = f(x)$, (C_2): $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$). Quay (H) xung quanh trục Ox ta thu được một khối tròn xoay như hình vẽ bên. Khi đó, thể tích khối tròn xoay thu được là

$$V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$$



Chú ý: *Trong trường hợp này, ta phải có* $f(x).g(x) \geq 0$ *với* $\forall x \in [a;b]$ *thì mới áp dụng được công thức.*

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x+1}$ là

A. $\int f(x)dx = e^{2x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = e^{x+1} + C.$

Câu 2: Biết F(x) là nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{x-1}$ và F(2)=1. Khi đó F(3) bằng bao nhiêu:

A. ln2+1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\ln\frac{3}{2}$ **D.** ln2

Câu 3: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin x$ là

A. $2x^2 + \cos x + C$. **B.** $2x^2 - \cos x + C$. **C.** $x^2 - \cos x + C$. **D.** $x^2 + \cos x + C$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 2$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)dx = 12x^2 + C$

B. $\int f(x)dx = 3x^4 - 2x + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^4 - 2x + C$

D. $\int f(x)dx = x^4 - 2x + C$

Câu 5: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{5x+4}$ trên $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$.

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln 5}\ln\left|5x+4\right|+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\ln\left|5x+4\right|+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\ln\left|5x+4\right|+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\ln\left(5x+4\right)+C$.

Câu 6: Cho hàm số *f(x)* có đạo hàm trên đoạn [0;3], *f*(0) = 2 và *f*(3)= 5. Tính $I=\int\limits_0^3 f'\left(x\right)dx$.

A. 3 **B.** −9 **C.** −5 **D.** 9

Câu 7: Tìm nguyên hàm $f(x)=(1-x)\cos x$ bằng cách đặt $u=1-x, \mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x.$ Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=(1-x)\sin x-\cos x+C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=(1-x)\cos x+\sin x+C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-(x\sin x+\cos x)+C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=(1-x)\sin x+\int\sin x\mathrm{d}x+C.$

Câu 8: Giá trị của $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos xdx$ bằng

A. $I=\dfrac{1}{4}.$ **B.** $I=4.$ **C.** $I=\dfrac{1}{4}\pi.$ **D.** $I=0.$

Câu 9: Giả sử $\int\limits_0^1\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}dx=\ln\dfrac{a}{b}$, trong đó $\dfrac{a}{b}$ tối giản.Tính $P=a.b$

A. $P=15$ **B.** $P=16$ **C.** $P=18$ **D.** $P=21$

$\Rightarrow a=9, b=2\Rightarrow P=ab=18$

Câu 10: Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=a+b\sqrt{3}$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị biểu thức $S=a-4b$

A. $S=\dfrac{9}{2}.$ **B.** $S=3.$ **C.** $S=-\dfrac{1}{2}.$ **D.** $S=\dfrac{1}{2}.$

Câu 11: Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $x=2\sin t.$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos 2t\right)\mathrm{d}t.$ **B.** $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t.$

C. $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t.$ **D.** $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t.$

Câu 12: Diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f_1(x), y=f_2(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x=a, x=b\ (a<b)$ được tính theo công thức:

A. $S=\int\limits_a^b\left|f_1(x)-f_2(x)\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\left|\int\limits_a^b f_1(x)-f_2(x)\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\int\limits_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx$. **D.** $S=\int\limits_a^b f_1(x)dx-\int\limits_a^b f_2(x)dx$.

Câu 13: Cho $I=\int xe^{x^2}dx$, đặt $u=x^2$, khi đó viết I theo u và du ta được:

A. $I=2\int e^u du$ **B.** $I=\int e^u du$ **C.** $I=\dfrac{1}{2}\int e^u du$ **D.** $I=\int ue^u du$

Câu 14: Cho $\int\limits_0^6 f(x)\mathrm{d}x=10$ và $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=7$ thì $\int\limits_4^6 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. -17. **B.** 17. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 15: Biết $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x=4$. Giá trị của $\int\limits_1^5 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng.

A. 7. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 64. **D.** 12.

Câu 16: Biết tích phân $\int\limits_0^1\dfrac{2x+3}{x-2}dx=a\ln 2+b$. Tính P =a+b:

A. 9 B. 5 **C.** -5 D. 2

Câu 17: Cho $\int\limits_1^2\left[3f(x)+2x\right]\mathrm{d}x=12$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\dfrac{11}{3}$. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Câu 18: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, biết $F(1)=0$. Giá trị của $F\left(\sqrt{2}\right)$ là

A. $-\dfrac{15}{8}$ **B.** $\dfrac{5}{8}$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $-\dfrac{3}{4}$

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$, $f\left(3\right)=5$ và $\int\limits_1^3 f'\left(x\right)dx=6.$ Tính $f\left(1\right).$

A. 10 **B.** 11 **C.** 1 **D.** -1

Câu 20: Biết $\int\limits_0^2 2x\ln\left(x+1\right)\mathrm{d}x=a\ln b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $T=a+b$.

A. $T=6$. **B.** $T=8$. **C.** $T=7$. **D.** $T=5$.

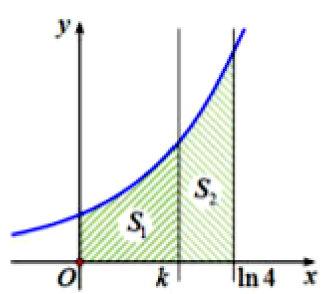
Câu 21: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-1$ và $y=-x^2+2x+3$ không được tính bằng công thức nào sau đây?

A. $S=\int\limits_{-1}^{2}(-x^2-x+2)\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int\limits_{2}^{-1}(2x^2-2x-4)\mathrm{d}x.$

C. $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|(x^2-1)-(-x^2+2x+3)\right|\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|2x^2-2x-4\right|\mathrm{d}x.$

Câu 22: Cho hình phẳng $\left(H\right)$ được giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0$ và $x=\ln 4.$ Đường thẳng $x=k\left(k\in\mathbb{R}, 0<k<\ln 4\right)$ chia hình phẳng $\left(H\right)$ thành hai phần có diện tích là S_1, S_2

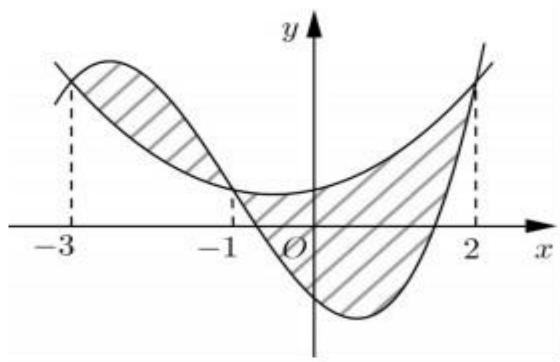
(xem hình vẽ).



Tìm k để $S_2=2S_1$.

A. $k=\ln 3$ **B.** $k=\ln\frac{8}{3}$ **C.** $k=\frac{2}{3}\ln 4$ **D.** $k=\ln 2$

Câu 23: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}(a,b,c,d,e\in R)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

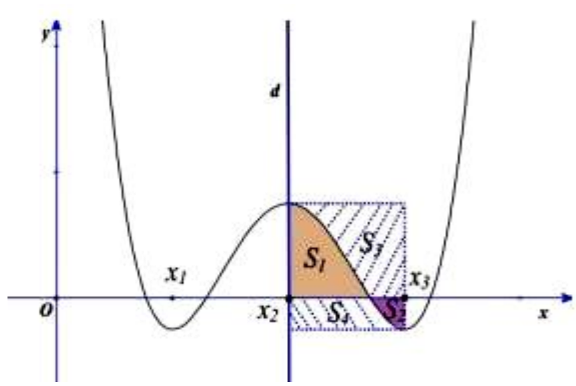


A. $\frac{253}{12}$ **B.** $\frac{125}{12}$ **C.** $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau: $f(0)=-2$ và $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=-\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=-\frac{5}{2}$.

Câu 25: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_3=x_1+2$, $f(x_1)+f(x_3)+\frac{2}{3}f(x_2)=0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x=x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1,S_2,S_3,S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên



Tỉ số $\frac{S_3+S_4}{S_1+S_2}$ gần kết quả nào nhất?

A. 1,62 **B.** 1,64 **C.** 1,68 **D.** 1,66

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.C	4.D	5.C	6.A	7.C	8.A	9.C	10.B
11.D	12.A	13.C	14.C	15.D	16.C	17.A	18.A	19.D	20.A
21	22.D	23.C	24.D	25.D					

CHƯƠNG IV: SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Số i $\boxed{i^2 = -1.}$

2. Định nghĩa số phức

Mỗi biểu thức dạng $a+bi,$ trong đó $a,b \in \mathbb{R},$ $i^2 = -1$ được gọi là một số phức.

Đối với số phức $z = a+bi,$ ta nói a là phần thực, b là phần ảo của $z.$

Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}.$

3. Hai số phức bằng nhau

Hai số phức $z_1 = a+bi$ $a;b \in \mathbb{R}$ và $z_2 = c+di$ $c;d \in \mathbb{R}$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d.$

Chú ý.

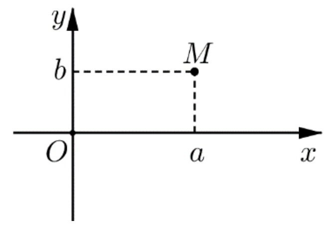
- Mỗi số thực a được coi là một số phức với phần ảo bằng 0 $a = a+0i$.

  Như vậy, mỗi số thực cũng là một số phức. Ta có $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$
- Số phức $0+bi$ được gọi là số ảo và viết đơn giản là $bi.$

  $bi = 0+bi.$
  - Đặc biệt: $i = 0+1i.$
  - Số i được gọi là đơn vị ảo.

4.Biểu diễn hình học số phức

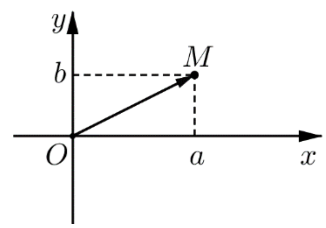
Như trên đã thấy, mỗi số phức $z = a + bi$ hoàn toàn được xác định bởi cặp số thực $a; b$.



Điểm $M\ a;b$ trong một hệ tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi.$

5.Môđun của số phức

Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M\ a;b$ trên mặt phẳng tọa độ (hình bên).

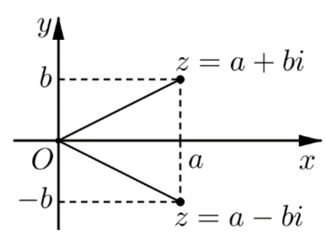


Độ dài của véctơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.

Vậy $|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ hay $|a+bi| = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ hay $\boxed{|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.}$

6.Số phức liên hợp

Cho số phức $z = a + bi.$ Ta gọi $a - bi$ là số phức liên hợp của z và kí hiệu là $\bar{z} = a - bi$



7. Phép cộng và phép trừ hai số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi \quad a;b \in \mathbb{R}$ và $z_2 = c + di \quad c;d \in \mathbb{R}$. Khi đó

- $z_1 + z_2 = \ a + c \ + \ b + d \ i.$
- $z_1 - z_2 = \ a - c \ + \ b - d \ i.$
- Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi.$

8. Phép nhân hai số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi \quad a;b \in \mathbb{R}$ và $z_2 = c + di \quad c;d \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\boxed{z_1 z_2 = \ a + bi \quad c + di \ = \ ac - bd \ + \ ad + bc \ i.}$$

Nhận xét. Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi \quad a;b \in \mathbb{R}$, ta có

$$\boxed{k.z = k.\ a + bi \ = ka + kbi.}$$

Đặc biệt: $0.z = 0$ với mọi số phức $z.$

9. Phép chia hai số phức

Chia số phức $c + di$ cho số phức $a + bi$ khác 0 là đi tìm số phức z thỏa $z = \dfrac{c + di}{a + bi}.$

Để tính thương ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a + bi$ cụ thể

$$z = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{c + di \quad a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i.$$

10. Căn bậc hai của số thực âm

Tương tự căn bậc hai của một số thực dương, từ đẳng thức $i^2 = -1,$ ta nói i là một căn bậc hai của $-1;$ $-i$ cũng là một căn bậc hai của $-1,$ vì $-i^{\ 2} = -1.$ Từ đó, ta xác định được căn bậc hai của các số thực âm.

Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}.$

11. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0.$

Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy:

- Khi $\Delta = 0,$ phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a};$
- Khi $\Delta > 0,$ có hai căn bậc hai (thực) của Δ là $\pm\sqrt{\Delta}$ và phương trình có hai nghiệm thực phân biệt, được xác định bởi công thức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};$

- Khi $\Delta < 0$ phương trình không có nghiệm thực vì không tồn tại căn bậc hai thực của Δ. Tuy nhiên, trong trường hợp $\Delta < 0$, nếu xét trong tập hợp số phức, ta vẫn có hai căn bậc hai thuần ảo của Δ là $\pm i\sqrt{|\Delta|}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho biết số phức liên hợp của số phức z là $\overline{z} = 1 - 3i$. Số phức z là

A. $z = 3 + i$ **B.** $z = 1 + 3i$ **C.** $z = 3 - i$ **D.** $z = \dfrac{1}{1-3i}$

Câu 2. Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 2 - i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $-5 + i$. **B.** $5 - i$. **C.** $-5 - i$. **D.** $5 + i$.

Câu 3. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** −2.

Câu 4. Tính môđun số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{25}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$

Câu 5. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

A. $\overline{z} = -2 + i$. **B.** $\overline{z} = -2 - i$. **C.** $\overline{z} = 2 - i$. **D.** $\overline{z} = 2 + i$.

Câu 6. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $\omega = z + i.\overline{z}$

A. $M(1;-5)$ **B.** $N(5;-5)$ **C.** $P(1;1)$ **D.** $Q(5;1)$

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z = 4 - 3i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 5.

Câu 8. Cho các số phức z thỏa mãn $|z + 1 - i| = |z - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $4x - 6y - 3 = 0$ **B.** $4x + 6y + 3 = 0$ **C.** $4x - 6y + 3 = 0$ **D.** $4x + 6y - 3 = 0$

Câu 9. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa $|zi + 1| = 1$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $I(0;-1)$. **B.** $I(0;1)$. **C.** $I(-1;0)$. **D.** $I(1;0)$.

Câu 10. Tìm phần ảo của số phức z, biết $(1 + i)z = 3 - i$

A. 2 **B.** −2 **C.** 1 **D.** −1

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

A. $S = 9\pi$. **B.** $S = 12\pi$. **C.** $S = 16\pi$. **D.** $S = 25\pi$.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2; w=(1+\sqrt{3}i)z+2$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn, tính bán kính đường tròn đó.

A. $R=5$. **B.** $R=2$. **C.** $R=3$. **D.** $R=4$

Câu 13. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$. Số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z=3+2i$ **B.** $z=-1+i$ **C.** $z=-2+2i$ **D.** $z=2+2i$

Câu 14. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2-6z+m=0$, $m\in\mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0\in\mathbb{N}$?

A. 13. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 15. Trong tập hợp các số phức, gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-z+\frac{2017}{4}=0$, với z_2 có thành phần ảo dương. Cho số phức z thoả mãn $|z-z_1|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_2|$ là:

A. $\sqrt{2016}-1$. **B.** $\frac{\sqrt{2017}-1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2016}-1}{2}$. **D.** $\sqrt{2017}-1$

BẢNG ĐÁP ÁN

1C	**2D**	**3B**	**4D**	**5C**	**6C**	**7C**	**8A**	**9B**	**10B**	**11C**	**12D**	**13D**	**14D**	**15A**